ÉCOLE NAVALE

Première composition de mathématiques

Concours 1988

PARTIE I :

On se donne une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres complexes, tels que $\lim_{n \to +\infty} |u_{n+1}/u_n| = 1$, et on suppose qu'il existe $d > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\forall n \geq N \quad , \quad n\left(1 - \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|\right) \geq 1 + d$$

1. On pose $v_n = n^{-1-\frac{1}{2}d}$. Montrer que pour n assez grand, $|u_{n+1}/u_n| \leq v_{n+1}/v_n$.

2. En déduire que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est absolument convergente.

On choisit : $u_0 = 1$: $\quad u_n = \dfrac{a(a+1)\ldots(a+n-1)\,b(b+1)\ldots(b+n-1)}{n!\,c(c+1)\ldots(c+n-1)} \quad n \geq 1$

où a, b, c sont trois nombres réels et c n'est pas un entier négatif. Pour tout z complexe, on pose :

$$F(a, b, c ; z) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n z^n$$ F est appelée série hypergéométrique.

3. Étudier la convergence de cette série lorsque $|z| > 1$ et lorsque $|z| < 1$.

4. Lorsque $|z| = 1$, donner, en utilisant la question 2, une condition <u>suffisante</u> portant sur les paramètres a, b, c qui assure la convergence de la série.

PARTIE II :

1. Montrer que pour $|z| < 1$:

   a. $(1+z)^p = F(-p, b, b ; -z) \quad p \in \mathbb{N}$.

   b. $\ln(1+z) = z\ F(1, 1, 2 ; -z)$.

   c. $e^z = \lim_{\beta \to +\infty} F(1, \beta, 1 ; z/\beta)$: justifier soigneusement le calcul.

2. Montrer que $F(a, b, c ; x)$ vérifie, lorsque x est réel, $|x| < 1$, l'équation différentielle :

$$(1) \qquad x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2} + (c - (a+b+1)x)\frac{dy}{dx} - aby = 0$$

PARTIE III :

On pose : $$B(p, q) = \int_0^1 u^{p-1}(1-u)^{q-1}\,du$$ où p et q sont deux réels strictement positifs.

1. Montrer que :

   a. $B(p, q) = B(q, p)$.

   b. $B(p, q+1) = \dfrac{q}{p} B(p+1, q)$.

   c. $B(p, q) = B(p+1, q) + B(p, q+1)$.

   d. $B(p+1, q) = \dfrac{p}{p+q} B(p, q)$.

Soit, pour x réel, $|x| < 1$: $G(a, b, c ; x) = \displaystyle\int_0^1 u^{b-1}(1-u)^{c-b-1}(1-ux)^{-a}\,du$

2. Déterminer les conditions sur a, b, c pour que l'intégrale définissant G converge.

TOURNEZ S'IL VOUS PLAIT

3. Développer G comme une série entière par rapport à la variable x (justifier votre calcul).

4. Montrer, en utilisant la question 1, que F et G sont proportionnelles et donner l'expression, en fonction de B (p, q) pour certaines valeurs de p et q, de la constante λ telle que $G = \lambda F$.

5. Quelle relation doit-on imposer sur a, b, c pour que l'intégrale définissant G converge lorsque $x = 1$? Comparer ceci à la réponse I.4. Calculer F $(a, b, c ; 1)$ en fonction de B (p, q) pour certaines valeurs de p et q (dépendant de a, b, c).

PARTIE IV :

On considère une équation différentielle de la forme : (2) $\quad x^2 \dfrac{d^2y}{dx^2} + x f(x) \dfrac{dy}{dx} + g(x)\, y = 0$

où f et g sont des fonctions développables au voisinage de 0 en séries entières de rayon de convergence 1.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n \quad ; \quad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n x^n$$

1. Vérifier que l'équation (1) est de cette forme, et déterminer dans ce cas f_0 et g_0.

2. Soit une série <u>formelle</u> de la forme (3) $\quad y = x^\alpha \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} y_n x^n\right)$

dans laquelle α et les $(y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont des complexes (si $\alpha \notin \mathbb{N}$, on peut se restreindre à x positif, avec la signification usuelle de x^α). Par substitution directe, montrer que si y est <u>formellement</u> solution de (2), α vérifie l'équation :

$$F(\alpha) =_{\text{def}} \alpha^2 + (f_0 - 1)\alpha + g_0 = 0$$

Déterminer les racines de cette équation dans le cas de l'équation (1).

3. Montrer, toujours par substitution directe, que les coefficients y_n vérifient une relation de récurrence de la forme :

$$(4) \qquad y_n F(\alpha + n) + \sum_{k=0}^{n-1} (c_{n,k} f_{n-k} + g_{n-k}) y_k = 0, \quad n \geqslant 1$$

avec toujours la condition $F(\alpha) = 0$, et on a posé $y_0 = 1$. Calculer le coefficient $c_{n,k}$.

Soient α_1 et α_2 les deux racines de l'équation $F(\alpha) = 0$, rangées de sorte que $Re(\alpha_1) \geqslant Re(\alpha_2)$. On note $s = \alpha_1 - \alpha_2$ et on suppose que $s \notin \mathbb{N}$.

4. Montrer que $F(\alpha_1 + n) = n(n + s)$ et $F(\alpha_2 + n) = n(n - s)$ et en déduire que les relations (4), avec $\alpha = \alpha_i \quad . \quad i = 1, 2$ déterminent uniquement $(y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

5. Montrer qu'il existe $r > 0$ et $M \geqslant 1$ tels que pour $n \in \mathbb{N}$: $|f_n| \leqslant M r^{-n}$; $|g_n| \leqslant M r^{-n}$ et $|\alpha_i f_n + g_n| \leqslant M r^{-n} \quad . \quad i = 1, 2.$

On choisit $\alpha = \alpha_1$. Montrer, en utilisant (4), que $|y_1| \leqslant M/r$, puis, par récurrence, que pour tout $n \geqslant 1$, $|y_n| \leqslant M^n r^{-n}$.

En déduire que la série (3) est convergente, et donner un minorant de son rayon de convergence en fonction de M (on rappelle que les rayons de convergence des séries donnant f et g sont égaux à 1).

6. En procédant de même, montrer que la série (3) est convergente lorsque $\alpha = \alpha_2$ et minorer son rayon de convergence.

7. Soit l'équation : $\quad x^2 \dfrac{d^2y}{dx^2} + (2x - 1) \dfrac{dy}{dx} = 0.$

Est-elle du type (2) ? Montrer que pour $x \neq 0$ la fonction $x \longrightarrow e^{-1/x}$ est une solution. De même, vérifier que la série formelle $y = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)!\, x^n$ est une solution formelle de l'équation : $\quad x^2 \dfrac{d^2y}{dx^2} + (2x - 1) \dfrac{dy}{dx} + 1 = 0.$

Quelles remarques vous inspirent ces constatations ?

8. On revient à l'équation (1) et on suppose que $c \notin \mathbb{Z}$. Montrer que deux solutions indépendantes au voisinage de l'origine sont $y^{(1)}(x) = F(a, b, c ; x)$ et $y^{(2)}(x) = x^{1-c} F(a', b', c' ; x)$ où a', b', c' sont des fonctions de a, b, c que l'on calculera (pour montrer que $y^{(2)}$ est solution, on comparera les relations de récurrence vérifiées par les coefficients u_n de la fonction F et celles obtenues par la substitution directe dans l'équation (1) de la forme proposée pour $y^{(2)}$).

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail